УДК 514.75

О. О. Белова

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЙ НА ГРАССМАНОПОДОБНОМ МНОГООБРАЗИИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей. Изучены параллельные перенесения направлений на данном многообразии.

In projective space the Grassmann-like manifold of centered planes is considered. Parallel displacements of directions on this manifold are studied.

Ключевые слова: проективное пространство, грассманоподобное многообразие, связность, ковариантный дифференциал, параллельное перенесение.

Key words: projective space, Grassmann-like manifold, connection, covariant differential, parallel displacement.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, \ldots = 1, \ldots, n$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I\,,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

причем формы Пфаффа ω^I, ω_I, ω_J^I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,\ \ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ центрированных m-мерных плоскостей L_m^*. Помещаем вершины A, A_a на плоскость L_m^* и фиксируем центр A (здесь и в дальнейшем индексы принимают значения: $a, \ldots = \overline{1, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$). Грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ [1] центрированных плоскостей задается уравнениями

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha,$$

где Λ_α^a, Λ_α^{ab} — некоторые функции; формы ω^α, ω_a^α — базисные формы данного многообразия; $\dim Gr^*(m, n) = (n - m)(m+1)$.

Компоненты фундаментального объекта $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^α, ω_a^α

$$\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0\,,\ \Delta\Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0\,.$$

Над многообразием $Gr^*(m, n)$ возникает главное расслоение $G^*\left(Gr^*(m, n)\right)$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G^* центрированной плоскости L_m^*.

В главном расслоении задается фундаментально-групповая связность по *Г. Ф. Лаптеву*:

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^a \omega^\alpha - L_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha, \ \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - L_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - L_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \ \tilde{\omega}_a = \omega_a - L_{a\alpha} \omega^\alpha - \Pi_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - L_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta.$$

Связность в ассоциированном расслоении $G^*\left(Gr^*(m, n)\right)$ определяется с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = \{\Gamma_{b\alpha}^a, L_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, L_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{\alpha\beta}^a, L_{\alpha\beta}^{ab}, L_{a\alpha}, \Pi_{a\alpha}^b, L_{\alpha\beta}, \Pi_{\alpha\beta}^a\}$$

на базе $Gr^*(m, n)$.

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [2] данного многообразия полями следующих геометрических образов: $(n - m - 1)$-плоскостью C_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L_m^*, и $(m - 1)$-плоскостью N_{m-1}, принадлежащей плоскости L_m^* и не проходящей через ее центр. Плоскость C_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость N_{m-1} — точками $B_{\hat{a}} = A_{\hat{a}} + \lambda_{\hat{a}} A$.

Теорема 1. *Аналог сильной нормализации Нордена грассманоподобного многообразия* $Gr^*(m, n)$ *позволяет задать связность в ассоциированном расслоении* [1].

Рассмотрим прямую, проходящую через точку A и лежащую в плоскости L_m^*. Она пересекает аналог нормали 2-го рода N_{m-1} в точке $B = \mu^a B_a = \mu^a (A_{\hat{a}} + \lambda_{\hat{a}} A)$, причем (см. [3])

$$\Delta\lambda_a + \omega_a = \lambda_{a\alpha} \omega^\alpha + \lambda_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha,$$

$$\Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + \lambda_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \ \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a \omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} \omega^\beta + \tilde{\lambda}_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta.$$

Находим дифференциал точки B

$$dB = \left[\theta + \left((-\lambda_\alpha + \mu_\alpha^b \lambda_b)\omega^\alpha - \Lambda_\alpha^{cb} \lambda_c \omega_b^\alpha\right)\right] B + \nabla\mu^a B_a + \mu^a \left[\lambda_a \omega^\alpha + \omega_a^\alpha\right] B_\alpha +$$

$$+ \mu^a \left[\left(\lambda_{a\alpha} + \lambda_a \lambda_b \mu_\alpha^b - \lambda_a \lambda_\alpha\right)\omega^\alpha + \left(\lambda_{a\alpha}^b - \lambda_a \lambda_c \Lambda_\alpha^{cb} - \delta_a^b \mu_\alpha\right)\omega_b^\alpha\right] A,$$

где $\mu_\alpha^a = \lambda_\alpha^a - \Lambda_\alpha^a$, $\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_a \lambda_\alpha^a$.

Так как обращение в нуль ковариантного дифференциала геометрического объекта μ задает параллельное перенесение в некоторой связности Γ, определенной этим объектом [4; 5], то справедлива

Теорема 2. *Прямая* $AB \subset L_m^*$, *определяемая точкой* $B \in N_{m-1}$, *переносится параллельно в плоскостной линейной связности* $\Gamma = \{\Gamma_{b\alpha}^a, L_{b\alpha}^{ac}\}$ *тогда и* *только тогда, когда точка B смещается в плоскости* $P_{n-m+1} = N_{n-m} + B$, *где* $N_{n-m} = A + C_{n-m-1}$ — *аналог нормали 1-го рода.*

Замечание. Аналогичное перенесение на поверхности рассматривал Норден [2].

Возьмем нормальную прямую AC, пересекающую аналог плоскости Картана $C_{n-m-1} \subset N_{n-m}$ в точке $C = \mu^\alpha B_\alpha = \mu^\alpha \left(A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A\right)$.

Находим дифференциал точки C

$$dC = \left[\theta - \left(\Lambda^a_\beta \lambda_a + \mu_\beta\right)\omega^\beta - \Lambda^{ba}_\beta \lambda_b \omega^\beta_a\right] C + \nabla\mu^\alpha B_\alpha +$$

$$+\mu^\alpha \left[\left(\lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha \mu^a_\beta\right)\omega^\beta + \left(\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \Lambda^{ab}_\beta - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha\right)\omega^\beta_b\right] B_a +$$

$$+\mu^\alpha \left[\left(\lambda_{\alpha\beta} - \lambda_a \lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_a \lambda_\alpha \mu^a_\beta - \lambda_\alpha \lambda_\beta\right)\omega^\beta + \left(\tilde{\lambda}^a_{\alpha\beta} - \lambda_b \lambda^{ba}_{\alpha\beta} - \lambda_b \lambda_\alpha \Lambda^{ba}_\beta - \lambda^a_\alpha \mu_\beta\right)\omega^\beta_a\right] A .$$

Теорема 3. *Прямая* $AC \subset N_{n-m}$, *определяемая точкой* $C \in C_{n-m-1}$, *переносится параллельно в нормальной линейной связности* $\Gamma = \{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$ *тогда и только тогда, когда точка C смещается в плоскости* $P_{m+1} = \overset{*}{L}_m + C$.

Замечание. Аналогичное перенесение на поверхности рассматривал *Чакмазян* [6].

Список литературы

1. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Чебоксары, 2006. С. 18—20.

2. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

3. *Белова О. О.* Связность 2-го типа в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2007. №38. С. 6—12.

4. *Шевченко Ю. И.* Параллельные перенесения на поверхности // Там же. 1979. №10. С. 154—158.

5. *Полякова К. В.* Параллельные перенесения направлений вдоль поверхности проективного пространства // Там же. 1996. №27. С. 63—70.

6. *Чакмазян А. В.* Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т. 10. С. 55—74.

Об авторе

Ольга Олеговна Белова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: olgaobelova@mail.ru

About the author

Dr Olga Belova — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: olgaobelova@mail.ru